**тЕоРИЯ Игр**

**Формальная модель**

*W=F(x,y) -* функция выигрыша

*x -*  контролируемые факторы (стратегии)

*y* - неконтролируемые факторы

**Модель игры в нормальной форме**

Одна из моделей (наиболее часто встречаются) – нормальная форма

*i*  - номер игрока, *I* - множество игроков

*xi* - стратегия стратегий *i*-ого игрока,

*Хi* - множество допустимых стратегий *i*-ого игрока

- функция выигрыша *i*-ого игрока, где

*х* - исход игры, *х=(х1 х2…хI) х∈Х Х=(Х1×Х2×…ХI)*

Предпочтение (знак ): стратегия лучше (предпочтительнее), если

при любых î – множество других игроков, кроме *i .*

Простейший пример - биматричные игры.

Пример 1 (дилемма заключенного)

Матрица проигрышей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *у1* | *у1* |
| *х1* | **-5**  -5 | **0**  -10 |
| *х2* | **-10**  0 | **-1**  -1 |

*х1 у1* - признаться

*х2 у2* - не признаться

Пример 2. (семейный спор)

Матрица выигрышей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *у1* | *У2* |
| *х1* | **4**  1 | **0**  0 |
| *х2* | **0**  0 | **1**  4 |

*х1 у1* - футбол

*х2 у2* - балет

Жирным шрифтом отмечены выигрыши первого игрока (строки).

Например в игре 1, выбрав стратегию *х1* он получит *w1*(*х1 у1* )= -5 или *w1*(*х1 у2* )= 0 зависимости от выбора второго игрока (столбцы).

**Игры с нулевой суммой**

Игра 2 лиц, для которой для *i=1,2.* Таким образом, выигрыш одного игрока всегда равен проигрышу другого.

Антагонистические игры (игры с нулевой суммой) описывают конфликты частного вида. Более того, для большинства имеющих место в реальной жизни конфликтов антагонистические игры либо вовсе не могут считаться приемлемыми, адекватными описаниями, либо, в лучшем случае, могут рассматриваться как первые грубые приближения.

**Во-первых,** антагонистические игры никак не затрагивают своими описаниями конфликты с числом, большим, чем два. В месте с тем, такие многосторонние конфликты не только встречаются в действительности, но являются принципиально более сложными, чем конфликты с двумя участниками, и даже не поддаются сведению к последним.

**Во-вторых,** даже в конфликтах с двумя участниками интересы сторон вовсе не обязаны быть противоположными; во многих конфликтах такого рода случается так, что игроки вовсе не заинтересованы причинить ущерб своим партнерам, хотя и отстаивают собственные интересы.

**В-третьих,** даже если любые две ситуации сравниваются игроками по их предпочтительности противоположным образом, различие разностей в оценках этой предпочтительности оставляет место для соглашений, компромисов и коопераций.

**Наконец, в-четвёртых**, содержательная острота конфликта не обязательно соответствует его формальной антагонистичности. Например, при встрече двух боевых единиц воюющих сторон (скажем, танков) обоюдное их стремление уничтожить друг друга не выражает антогонистичности конфликта: в антогонистическом конфликте цели сторон оказываются строго противоположными, и стремлению одной стороны уничтожить другую противоположным будет стремление избежать уничтожения.

**Не противоположность интересов - интересы игроков часто совпадают.**

Казалось бы, что это обстоятельство должно упрощать решение, но на самом деле наоборот.

**а) Возможность соглашений**

Раз интересы не противоположны, то можно договориться и получить взаимную выгоду

* Некооперативные игры - запрещены любые соглашения между игроками по поводу совместного выбора стратегий.
* Кооперативные игры - соглашения (любые или какого-либо типа) разрешаются.
* Коалиционные игры - возможны создания коалиции.

В антагонистических играх соглашения бесполезны, т.к. они не дают обоюдной выгоды.

**б) Информированность о стратегии и предпочтения других игроков.**

Антагонистические игры – информированность о предпочтениях и возможных стратегиях - полная

Некооперативные игры - нет обмена информацией

Кооперативные игры - соответствуют случаям полной или частной информативности других игроков.

* неточность информации о предпочтениях других игроков означает, что i-ый игрок точно не знает, в какой игре он участвует. Но даже полная информация о предпочтениях других игроков не гарантирует оптимального исхода игры.
* отсутствие информации о выборе стратегий других игроков не позволяет i-ому игроку представить исход игры. Эта неопределенность тем больше, чем меньше информированность i-ого игрока.

**Поведение игрока определяется информацией, которой он обладает!**

Блеф - неверная информация о выборе стратегии каким-либо игроком, сознательный обман.

Пусть i объявляет свою стратегию, если ему поверят другие игроки, будут искать среди своих стратегий наилучший ответ.

Значит, игрок i будет иметь информацию о выборе других игроков и воспользуется этим.

## Принципы выбора стратегий в неантагонистических играх

Не существует единого и объективного понятия оптимальной стратегии для таких игр (Гермейер).

Два подхода к выбору стратегии:

1. Изоляционизм - следствие не информированности при выборе стратегии (учитываются только собственные интересы).

Примеры:

а) Авантюризм: выбор стратегии в предположении, что стратегии, других игроков точно известны. Крайне неосторожный принцип.

в) Пессимизм (max min): предполагаем наличие информации о влиянии на выигрыш чужие стратегии. Но чужие критерии неизвестны.

1. Коллективизм: движущая сила - возможность получить выгоду от кооперации. Введение единого для всех игроков общего критерия, добровольный обмен информацией об интересах, выборе стратегий, поиск взаимно приемных решений.

Примеры: арбитражная схема НЭШа и вектор ШЕПЛИ.

### **Принцип доминирования (изолированное поведение)**

Стратегия *хi1* доминирует стратегию *хi11*, если для любого *хî∈Хî*



*î* - все номера игроков, кроме *i î∈I⁄{i}*

Стратегия *хiD* называется доминирующей стратегией игрока *i*, если для любого  и для любых 



### **Равновесие в доминирующих стратегиях**

Исход *хD=(х1D, x2D…xID)* называется равновесием в доминирующих стратегиях.

Наилучший результат для всех игроков - абсолютно оптимальные стратегии для **некооперативного** поведения (не всегда оптимальны для кооперативного варианта). Пример - дилемма заключенного.

Для исключения доминируемых стратегий игроку нужно знать только свою функцию выигрыша (изолированное поведение).

### **Принцип гарантированного результата (изолированное поведение)**

Стратегия хi\* называется maxmin-ой (осторожной) стратегией игрока i,

 

 - гарантированный результат

Игрок i при этом выбирает стратегию, не обращая внимания на функции выигрышей других игроков.

Осторожные стратегии - следствие полной изолированности игроков. Игрок ориентируется только на свою функцию выигрыша и может не знать ее для других игроков (кроме игр с нулевой суммой, когда W1=-W2).

### **Оптимальность по Парето**

1. Исход доминирует по Парето исход , если для любого *i∈I*  и существует хотя бы одно *i* , для которого это неравенство строгое.
2. Исход  оптимален по Парето,

если он **не доминируем** по Парето.

**Замечания!**

1. Если ситуация *maxmin x\*=(x1\* x2\*…xI\*)* оптимальна по Парето, то maxmin-ые стратегии оптимальны. Никто не может получить больше, чем гарантированный выигрыш.
2. Если ситуация *х\** не оптимальна по Парето, то существуют такие  *х∈Х*, что *Wi(x)≥ vi ,* причем для некоторых *i* неравенство строгое. В этом случае вопрос об оптимальной стратегии не решается.
3. В играх двух лиц с нулевой суммой maxmin, равновесие в доминирующих стратегиях и оптимальность по Парето эквивалентны.

**Равновесие по Нэшу**

Каждый игрок выбирает стратегию независимо от стратегий других игроков: не знает их функций выигрыша, однако он может наблюдать за реакцией других игроков на его стратегию (метод Курно).

Для игры *Г=〈i∈I, Xi , Wi〉* исход *хN=(x1Nx2N…xIN*) называется равновесием по Нэшу, если для любого игрока *Wi (xiN, xiN)≥Wi (xi, xiN)* для любого *хi∈Xi* .

Рекомендаций по поводу выбора точек равновесия по Нэшу в общем случае нет. Оно реализуется как бы «случайно». В играх с нулевой суммой равновесие по Нэшу совпадают с седловыми точками.

*➀ Равновесие по Нэшу и гарантированный результат*

Пусть *хN* - точка равновесия по Нэшу.

Для всех *i* справедливо:  .

Возьмем МАХ по *хi* в этом неравенстве.

Т.к. это неравенство выполняется для любых 

 т.е. *vi ≤ Wi(xN)* .

В равновесии по Нэшу игроки не могут получить меньше, чем гарантированный результат, т.е. равновесие по Нэшу оптимально по MAXMIN.

*➁ Равновесие по Нэшу и оптимальное по Парето.*

**Парето:** *∀ i∈I Wi (xP)≥Wi (x) для ∀х∈Х*

Доминирование по Парето: Исход оптимален по Парето, если он не доминируем по Парето.

**Нэш**: *∀ i∈I Wi (xN)≥Wi (xi, xiN) для хi∈Хi*

Равновесие по Нэшу может быть не оптимальным по Парето.

**Различие оптимальности по Нэшу и оптимальности по Парето.**

Нэш: ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша.

Парето: все игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого.

➂ Если игра разрешима по доминированию (множества *Хi i=* конечны), то любое равновесие в доминирующих стратегиях является равновесным по Нэшу (без доказательства).

Но обратное неверно! более того, равновесный исход по Нэшу может содержать доминируемые стратегии.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1  1 | 0  1 | 0  1 |
| 2 | 0  0 | 1  0 | 0  1 |
| 3 | 1  0 | 0  1 | 1  0 |

(1,1) - точка равновесия по Нэшу.

Игрок I: 3 доминирует 1

Игрок II: 3 доминирует 1

Т.о. равновесие содержит доминируемые стратегиии. Если исключить доминируемые стратегии (1,1) , то игра 2х2 не имеет ситуаций равновесия.

## Примеры

Пример 1 (дилемма заключенного)

Матрица проигрышей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
| 1 | 5  5 | 0  10 |
| 2 | 10  0 | 1  1 |

х1у1 - признаться

х2у2 - не признаться

minmax А и В=5 для ситуации (х1у1).

(х1у1) - равновесие в доминирующих стратегиях и равновесие по Нэшу.

(х2у2) - не равновесна по Нэшу

(х2у2) - лучше по Парето, чем по (х1у1)

(х2у2) - не лучше по Парето, чем (х1у2) и (х2у1)

### **Не кооперативный вариант**

Игрок А: х1 строго доминирует х2

Игрок В: у1 строго доминирует у2

Но равновесие в доминирующих стратегиях не оптимально.

(х1у1) - точка равновесия, но этот исход не оптимален по Парето, но если оба выберут свои *доминируемые* стратегии (х2у2), то результат будет существенно лучше. Но если при этом один из игроков сыграет неправильно, то получит наименьший проигрыш = 0.

### **Кооперативный вариант**

(х2у2) - хорошая стратегия, т.к. (х1у1) хуже для обоих. Но повод нарушать соглашение остается, поэтому такое равновесие неустойчиво.

Пример 2. (семейный спор)

Матрица выигрышей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
| 1 | 4  1 | 0  0 |
| 2 | 0  0 | 1  4 |

х1 у1 - футбол

х2 у2 - балет

1. Доминируемых стратегий нет
2. maxmin А и В = 0
3. (х1 у1) и (х2 у2) - точки равновесия по Нэшу

Ситуации равновесия не эквивалентны для различных игроков:

исход (x1y1) предпочтительнее для игрока А, а исход (x2 y2) для В.

1. Исходы (х1 у1) и (х2 у2) - не доминируемые по Парето, а значит оптимальны по Парето.

### **Некооперативный вариант**

Если соглашения невозможны, то равновесные стратегии ничего не дают - каждый может выбрать «свою» точку равновесия. Принцип max min дает вообще наихудший результат.

### **Кооперативный вариант**

Если соглашения возможны, то результат будет зависеть от вида соглашения:

* выбирать свою наилучшую стратегию с определенной вероятностью (при многократном повторении игры). Тогда в среднем 
* информировать о своем выборе и вынудить партнера выбрать наилучшую из оставшихся стратегий (иерархическая модель, игра с лидером)
* случайный совместный выбор - бросаем жребий 

Замечание! В некооперативном варианте результат  невозможен, т.к. в этом случае каждый игрок находит свою оптимальную смешанную стратегию независимо.